

IL PENSIERO PROPORZIONALE

Un percorso didattico in una
classe di seconda media

CONSIDERAZIONI GENERALI

- Oggi si ritengono centrali, nello sviluppo educativo degli alunni, sia i processi individuali che le interazioni con gli altri.
- Si ritiene pertanto essenziale favorire l'apprendimento attraverso discussioni aperte e confronto di idee.
- Da ciò emerge che il **ruolo dell'insegnante** è quello di **promuovere** negli alunni le qualità tipiche di un **ricercatore**:
- di una persona che sappia affrontare situazioni complesse, anche al di fuori della scuola
- e **non** quello di preparare gli alunni **alla memorizzazione e alla ripetizione** di formule e concetti.

UN APPROCCIO TRADIZIONALE

- *Rapporti – Proporzioni – Le proprietà delle proporzioni – Determinazione del termine noto in una proporzione – Percentuali – Proporzioni – Problemi risolvibili con una proporzione – Proporzionalità diretta – Proporzionalità inversa – Problemi sulla proporzionalità - La ripartizione - Problemi del tre semplice – Problemi del tre composto – Tasso percentuale - Il deposito bancario*
- “Per riscaldare 20 stanze di un albergo per 15 giorni si sono consumati 75 q di nafta. Quanti quintali di nafta si consumeranno per riscaldare 35 stanze per 24 giorni?” (Flaccavento Obiettivi e metodi, Fabbri)
- “Per produrre 16.000 kg di una data merce, 16 operai impiegano 30 giorni lavorando 6 ore al giorno. Quanti giorni occorrerebbero per produrre 14.000 kg della stessa merce se gli operai impiegati fossero 18 e l’orario giornaliero di lavoro fosse di 7 ore?” (Mariscotti, Aritmetica, Petrini)

da Angela Pesci *Lo sviluppo del pensiero proporzionale*, Pitagora editrice, BO 2002.

- In una fotografia un'auto è lunga 3,2 cm e in un ingrandimento è lunga 14,4 cm. Qual è il fattore di ingrandimento.
- Una confezione da 250 g di caffè costa 4000 lire mentre una confezione da 300 g di un altro tipo di caffè costa 5100 lire. Qual è il caffè più economico?
- Avrete notato che su alcuni oggetti d'oro c'è una piccola incisione con scritto il numero 750: ciò significa che su 1000 parti, 750 sono di oro puro e il resto è generalmente rame. Quale sarà la quantità di oro puro contenuta in uno di tali oggetti che pesa 64 g?
- Mario ha partecipato ad un torneo di ping pong di 18 partite, vincendone 12. Antonio, ha partecipato ad un altro torneo di 24 partite, ne ha vinte 16. Chi ha avuto il miglior risultato?

Questi sono i risultati:

	Problema			
	1)	2)	3)	4)
Giusto	66%	48%	46%	50%
Sbagliato	25%	36%	29%	44%
Non risolto	9%	16%	25%	6%

6° seminario nazionale curricolo
verticale, Sara Zaccardelli

ALCUNE RIFLESSIONI

- Dalla lettura della tabella si deduce che quasi tutti gli alunni hanno affrontato, ognuno secondo il proprio ragionamento, il problema numero quattro.
- Questo induce a pensare che se l'esercizio proposto riguarda tematiche più vicine all'interesse dei ragazzi maggiore è il grado di coinvolgimento nell'attività proposta.
- Dall'analisi di questa situazione prende lo spunto l'itinerario didattico che viene presentato.

Analisi delle soluzioni scorrette:

L'argomentazione più frequente è stata la seguente

- $18 - 12 = 6$ Mario
- $24 - 16 = 8$ Antonio
- Mario è stato più bravo di Antonio perché ha perso meno partite
- altri concludono che il miglior giocatore è stato Antonio perché “ha avuto maggior risultato”.

L'itinerario didattico è fondato su
tre ipotesi:

- l'apprendimento significativo del ragionamento proporzionale non può avvenire nel modo tradizionale, con la sola descrizione da parte dell'insegnante.
- gli alunni di 12-13 anni messi in adeguate situazioni didattiche sono in grado di proporre ipotesi di modelli risolutivi, di confutare il ricorso a strategie scorrette e valicare la correttezza del ragionamento proporzionale
- la discussione collettiva, coordinata dall'insegnante sia la modalità più efficace per uno sviluppo positivo del pensiero proporzionale.

SCHEDA N.1

- ***I miscugli di colore***
- *Si devono dipingere di verde tre pannelli di dimensioni diverse e si hanno a disposizione barattoli tutti uguali, di colore giallo e blu.*
- *I pannelli devono avere tutti la stessa tonalità di colore.*
- *Marco ha dipinto il primo pannello utilizzando un miscuglio ottenuto con 4 barattoli di blu e 6 barattoli di giallo*
- *Luisa deve dipingere il secondo pannello: per ottenere la stessa tonalità di colore ed avendo a disposizione 10 barattoli di blu, di quanti barattoli di giallo ha bisogno?*
- *Piero, per il terzo pannello, ha 3 barattoli di giallo: di quanti barattoli di blu ha bisogno?*

Prima di rispondere colloca i dati nella seguente tabella, poi rifletti e completa la tabella:

	Barattoli di blu	Barattoli di giallo
Marco		
Luisa		
Piero		

Spiega il tuo ragionamento per completare la tabella:

per Luisa

.....

per Piero

.....

Seguito alla scheda n.1

A conclusione della discussione sulla scheda n.1:

- Non ho cambiato idea sulla mia posizione perché
.....
- Ho cambiato idea sulla mia posizione perché
.....
- Sono incerto sulla mia posizione perché
.....

RISULTATI DELLA SCHEDA N.1

La maggior parte degli alunni (18/21) ha completato la tabella della scheda valutando le differenze nel numero di barattoli di diverso colore in modo da trovare i dati mancanti.

Alcune risposte:

- **Antonio**: per trovare i barattoli necessari a Luisa:” bisogna aggiungere la differenza dei barattoli di giallo e di blu di Marco e cioè di “2” poi ho trovato anche quelli gialli di Luisa aggiungendo 2 ai suoi barattoli blu. Per Piero ho fatto lo stesso ragionamento.”
- **Chiara** : “dato che si hanno 10 barattoli blu per ottenere un colore uguale bisogna aumentare i barattoli tanto quanto sono stati aumentati quelli blu di Marco $10 - 4 = 6$ perciò $6 + 6 = 12$.
- Per Piero : poiché ha 3 barattoli gialli cioè tre in meno anche per ottenere il numero dei barattoli blu ho fatto $4 - 3 = 1$ ”

Queste sono due delle spiegazioni che ho riportato per esemplificare il tipo di ragionamento che tutti i ragazzi di questo gruppo hanno dato alle loro risposte.

Seguito alla scheda n.1

Soltanto 3 alunni su 21 hanno completato la tabella considerando i rapporti tra le quantità di barattoli di colori.

- **Mattia** : “per trovare i barattoli gialli di Luisa ho fatto $10 : 4 = 2,5$ poi ho moltiplicato $2,5 \times 6$ ed ho ottenuto il numero di barattoli gialli di Luisa.”
- **Lorenzo**: “ho diviso sia 4 sia 6 per 4 così la proporzione tra il giallo e il blu resta uguale ma ridotta; quindi $4 : 4 = 1$; $10 \times 1 = 10$; poi $6 : 4 = 1,5$ quindi ho fatto $1,5 \times 10 = 15$ ”
- **Elisa** : “ho scritto il numero dei barattoli di Marco come una frazione $\frac{4}{6}$ che ho ridotto in $\frac{2}{3}$ poi ho trovato la frazione equivalente a $\frac{2}{3}$ con numeratore 10 ed ho scoperto che il numero dei barattoli di giallo di Luisa deve essere 15. Per Piero ho fatto lo stesso ragionamento.”

La discussione tra gli alunni

I ragazzi dei due gruppi sono stati invitati ad esporre i loro ragionamenti cercando di “convincere” i sostenitori della proposta diversa dalla loro.

La discussione è stata molto vivace ed in particolare i sostenitori della tesi in favore del calcolo della differenza tra i barattoli sono stati molto agguerriti portando a supporto della loro convinzione anche schemi

- **Asia** : disegna tre pannelli diversi : il primo viene colorato con 4 blu e 6 gialli e si ottiene una certa tonalità di verde; per il secondo se si hanno 10 blu basta metterne 12 gialli perché se anche in questo ne togliessi 2 avrei una perfetta parità tra i barattoli dei due colori come nel primo pannello quindi non cambia nulla sulla tonalità del verde e così via.
- **Lorenzo** : non è d'accordo perché se i barattoli di un colore aumentano quelli dell'altro colore devono aumentare allo stesso modo e per mantenere la stessa tonalità di verde anche la differenza tra i barattoli dei due colori non può rimanere invariata
- **Emilio**: “ Se pensiamo ai barattoli di colore considerando la loro misura in litri, si può capire meglio che se aumentano i litri di un colore(10 barattoli blu di Luisa) non può rimanere invariata la differenza tra il blu e il giallo per mantenere la stessa tonalità di verde”

SCHEDA N 2

Maria, Carlo, Giulio e Margherita sono amici fin dai tempi dell'asilo; ora , che frequentano la scuola media, si trovano nella stessa scuola ma in classi diverse.

Dai risultati di un test di matematica a cui sono stati sottoposti si è avuto il seguente risultato :

	Maria	Carlo	Giulio	Margherita
PUNTEGGI TOTALIZZATI	15	18	30	24
PUNTEGGI TOTALI	25	30	50	40

In base ai risultati ottenuti, secondo te chi è il più bravo?

Spiega il motivo delle tue risposte.

Risultati della scheda n.2

Ancora 9 alunni su 21 rispondono al quesito posto cercando la soluzione facendo la differenza tra il numero totale delle domande e il numero delle risposte esatte

I rimanenti 12 risolvono l'esercizio stabilendo un rapporto tra risposte giuste e totale delle domande affrontate.

- **Luigi**: “ ho scritto i dati sottoforma di frazione $15/25$ ecc.. ho ridotto ai minimi termini ed ho ottenuto sempre lo stesso valore”

Alla domanda dell'insegnante sul perché si è pensato alla scrittura di frazione,

- **Alice** risponde: “ ognuno dei ragazzi della storia ha fatto un punteggio su un totale cioè una parte su un intero”.

Altri alunni hanno risposto trovando il m.c.m. dei denominatori delle frazioni ottenute dai dati e poi hanno constatato che le frazioni ottenute sono uguali.

- **Asia** : “ ho trasformato tutto in decimi come già abbiamo fatto per scoprire i voti della verifica di storia ed ho scoperto che i ragazzi del problema hanno avuto tutti 6!”

SCHEDA N.3

Nella seguente tabella ci sono gli esiti delle partite a tennis giocate da alcuni giocatori della stessa categoria.

- Completa la tabella in modo che i giocatori si possano considerare ugualmente bravi (in base agli esiti della tabella).

	Claudio	Enzo	Anna	Marco	Elena
n. Partite vinte	20	10	50
n. Partite giocate	70	105

Spiega come hai fatto a trovare i numeri per completare la tabella.

Risultati della scheda n.3

Tre alunni completano la tabella trovando i dati mancanti con la differenza

Giorgio : per trovare il numero mancante ho cercato di mettere tutti i risultati sullo stesso piano, facendo in modo che per ogni coppia di numeri avanzasse 50 perché avanzava tra 20 e 70.

Tra i restanti 18 alunni

- alcuni hanno completato la tabella considerando il rapporto tra $20/70$ e conoscendo il valore di tale rapporto hanno trovato i dati mancanti.
- Altri hanno ridotto la frazione $20/70$ ai minimi termini ed hanno ottenuto i dati mancanti attraverso l'uso delle frazioni equivalenti
- Altri ancora hanno osservato che le partite vinte da Enzo sono la metà di quelle vinte da Claudio quindi il numero delle partite giocate da Enzo deve essere la metà di quelle giocate da Claudio e così via.

Scheda n.4

Completa ora la seguente tabella in modo che per ogni giocatore la differenza tra il numero delle partite giocate e quello delle partite vinte sia 30.

	Ada	Aldo	Bice	Enzo	Anna	Ivo	Gino	Emma
N .Partite vinte	2	30	10
N. Partite giocate	32	64	100

In base ai dati della tabella completata sei disposto a considerare tutti i giocatori “**ugualmente bravi**”?

Giustifica la risposta.

Risultati della scheda n.4

- La gran parte degli alunni completa la tabella secondo quanto richiesto, poi, alla domanda se i giocatori sono tutti ugualmente bravi 18 rispondono che non lo sono giustificando:
 - Alcuni con il calcolo del rapporto tra partite vinte e partite giocate e verificando che tali rapporti sono diversi.
 - Altri, semplificando la frazione ottenuta considerando partite vinte/partite giocate; hanno verificato che le frazioni ottenute sono diverse quindi non si tratta di frazioni equivalenti tra loro pertanto i giocatori non hanno ottenuto lo stesso punteggio.

I restanti tre alunni completano la tabella inserendo i numeri mancanti in modo che la differenza sia 30 e ritenendo che i giocatori siano tutti ugualmente bravi proprio perché questa differenza rimane invariata.

SCHEDA CONCLUSIVA

Nel nostro lavoro abbiamo esaminato diverse situazioni:

- Miscugli di colore
- I risultati di test di matematica
- I giocatori di tennis

Si tratta di situazioni diverse, ma c'è qualcosa che le accomuna.
Cerca di spiegarlo nel modo più ampio possibile.

Alcune conclusioni

Il punto di vista degli alunni

Dalla lettura delle riflessioni dei ragazzi alla richiesta della scheda conclusiva emerge quanto segue:

Tutti hanno scritto che nelle schede proposte, pur, nella diversità delle situazioni, l'elemento comune è la procedura di soluzione: infatti in ciascun caso è stato possibile dare una risposta mettendo a confronto i dati stabilendo il valore del loro rapporto.

Alcune risposte:

- **Giorgio**:... “in tutti questi casi bisogna mettere tutti i dati sullo stesso piano e ciò avviene con il calcolo dei rapporti”
- **Emilio** : “ la cosa che accomuna tutte le situazioni è che in ogni problema calcoliamo rapporti.....in particolare troviamo che le uguaglianze tra i rapporti servono: tra i barattoli di colore per ottenere la stessa tonalità di colore, nei test di matematica per scoprire alla fine che erano tutti ugualmente bravi e con i giocatori di tennis quando abbiamo fatto diventare tutti ugualmente bravi..”
- **Viviana** :” in tutti i casi si può usare uno stesso procedimento ad esempio usando le frazioni equivalenti oppure anche i rapporti tra i dati a disposizione e in questo caso si fa anche prima.”

Alcune conclusioni

Il punto di vista dell'insegnante

L'attività svolta ha confermato:

- Attenta e vivace partecipazione di tutti grazie anche ai contenuti delle schede riguardanti situazioni più vicine all'interesse dei ragazzi.
- Coinvolgimento attivo nella discussione che ha fatto seguito ad ogni scheda: questo favorisce una proficua interazione tra pari e aiuta a sviluppare la capacità di argomentare il proprio punto di vista e di ascoltare quello degli altri.
- Importanza della continua verbalizzazione delle proprie idee per la soluzione delle questioni proposte perché ciò favorisce una riflessione più attenta sul proprio pensiero.
- Possibilità per ciascuno di potersi esprimere sapendo di essere ascoltato a prescindere dall'esattezza della sua risposta